

## Έκτο τεστ Απειροστικός Λογισμός 2

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

### Θέμα 1

(i) Αν  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση, να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  συγκλίνει αν και μόνο αν η συνάρτηση ολοκλήρωμα

$F(x) = \int_0^x f(t) dt, x \geq 0$  είναι φραγμένη και αποκλίνει στο  $+\infty$  αν και μόνο αν η  $F$  είναι μη φραγμένη.

(ii) Δίνονται  $p, q: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε για κάποια  $m > 0$  και  $x_0 \geq 0$ , να ισχύει  $p(x) \geq m > 0$ , για κάθε  $x \geq x_0$  και επίσης  $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 0$ . Με χρήση του ζητήματος (i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$G(x) = e^{-\int_0^x p(t)dt} \int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(t)dt} ds, x \geq 0 \text{ τείνει προς το } 0.$$

### Θέμα 2

Να υπολογίσετε την ακριβή τιμή (αν υπάρχει) των παρακάτω γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

(i)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|} dx$ , όπου  $\alpha > 0$ .

(ii)  $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$

(iii)  $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

(iv)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ , όπου  $p \in \mathbb{R}$ .

### Θέμα 3

(i) Αν  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε κάθε διάστημα  $[a, t]$ ,  $t > a$  και το  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  συγκλίνει, να αποδείξετε ότι  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  συγκλίνει (Υπόδειξη: Να κάνετε χρήση του Κριτηρίου Σύγκρισης).

(ii) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν.

(a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$  και  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ .

(b)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x} dx$

(c)  $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-\alpha)^p}$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , με  $\alpha < \beta$  και  $p < 1$ .

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!